

базирующимся на каких-либо моделях турбулентных течений. Ряд постоянных, фигурирующих в получаемых таким образом соотношениях, определяется из эксперимента. Эксперимент же является и критерием правильности, работоспособности принятых гипотез. В связи с этим указанное направление исследования турбулентности называется полуэмпирическим, оно составляет содержание так называемой полуэмпирической теории турбулентности. Полуэмпирическая теория турбулентности играет важную роль при решении большинства практических задач.

Мы не будем останавливаться на рассмотрении этого направления, так как оно подробно изучается в курсах «Механика жидкости и газа» и «Тепломассообмен». Проблему замыкания осредненных уравнений - уравнений для первых моментов - мы рассмотрим с другой точки зрения.

Как показали Фридман и Келлер [14], для получения выражений, описывающих динамику вторых моментов $\overline{u_i u_k}$, обуславливающих незамкнутость уравнения (3.10), можно снова воспользоваться уравнением Навье-Стокса (3.2), а для $\overline{u_h \dot{v}}$ — уравнением (3.3). Казалось бы, таким образом проблему замыкания можно решить строго, не прибегая ни к каким гипотезам. Однако оказывается, это не так: строгим путем замкнуть систему осредненных уравнений турбулентности принципиально невозможно. В полученные для $\overline{u_i u_k}$ выражения войдут новые неизвестные- моменты третьего порядка. В принципе с помощью уравнения Навье-Стокса можно получить выражения и для этих моментов и для моментов любого, более высокого порядка, но они всегда будут незамкнутыми, так как содержат новые неизвестные - моменты еще более высокого порядка, причем количество этих неизвестных с увеличением порядка момента быстро возрастает.

Уравнения для моментов второго порядка $\overline{u_i u_h}$ и $\overline{u_h \dot{v}}$ играют в современной теории турбулентности важную роль. Поэтому имеет смысл получить и проанализировать эти уравнения.

3.2. Уравнения динамики моментов второго порядка поля скорости (уравнения баланса энергии)

3.2.1. Баланс полной энергии турбулентности

Вначале получим уравнение сохранения для полной энергии турбулентного течения, включающей в себя и энергию осредненного, и энергию пульсационного движения.

Для этого уравнение движения для актуальных величин – уравнение Навье—Стокса

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_l}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k}, \quad (3.12)$$

где $\sigma_{lk} = \mu \left(\frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_l} \right)$ – вязкие напряжения, домножим на U_j :

$$U_j \frac{\partial U_l}{\partial t} + U_j U_k \frac{\partial U_l}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} U_j \frac{\partial P}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} U_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k}. \quad (3.13)$$

Запишем также уравнение движения для j -й компоненты скорости, домноженное на U_i :

$$U_i \frac{\partial U_l}{\partial t} + U_i U_k \frac{\partial U_l}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial P}{\partial x_l} + \frac{1}{\rho} U_i \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k}. \quad (3.14)$$

Сложив (3.11) и (3.12), получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (U_l U_j) + \frac{\partial}{\partial x_k} (U_l U_j U_k) = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left(U_l \frac{\partial P}{\partial x_l} + U_j \frac{\partial P}{\partial x_l} \right) + \frac{1}{\rho} \left(U_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k} + U_l \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Проведя осреднение уравнения (3.15), положив $i=j$ и умножив на $\rho/2$, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \frac{\overline{U_l U_l}}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{\overline{U_l U_l} U_k}{2} \right) = -\overline{U_l \frac{\partial P}{\partial x_l}} + \overline{U_l \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_k}}. \quad (3.16)$$

Все слагаемые этого уравнения имеют энергетический смысл. В частности, величина

$$E = \rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} = \rho \frac{\overline{U_i} \overline{U_i}}{2} + \rho \frac{\overline{u_i u_i}}{2} = E_{\text{оср}} + E_{\tau} \quad (3.17)$$

представляет собой суммарную кинетическую энергию турбулентного потока в единице объема. Равенство (3.17) показывает, что полная энергия турбулентности E есть сумма энергии осредненного движения $E_{\text{оср}} = \rho \overline{U_i} \overline{U_i} / 2$ и энергии пульсационного движения:

$$E_{\tau} = \rho \overline{u_i u_i} / 2 = \rho (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}) / 2.$$

Преобразуем слагаемые в правой части уравнения (3.16). К первому из них добавим равное нулю выражение

$$-\overline{U_i \frac{\partial P}{\partial x_i}} - P \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} (\overline{P U_i}) = -\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{P U_k}). \quad (3.18)$$

Чтобы лучше понять смысл второго слагаемого в правой части (3.16), воспользуемся очевидным соотношением

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i \sigma_{ik}}) = \overline{U_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}} + \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}}. \quad (3.19)$$

Левая часть, этого выражения представляет собой полную работу сил вязкости, задаваемых тензором вязких напряжений σ_{ih} . Слагаемые правой части (3.19) показывают, на что затрачивается эта работа. Первое из них — $\overline{U_i \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}}$ — та часть работы вязких сил, которая затрачивается на изменение кинетической энергии жидкой частицы. Действительно, $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}$, как известно, есть равнодействующая сил вязкости, приложенных к жидкой частице, Если эта равнодействующая равна нулю, то вязкие силы не оказывают влияния на ускорение жидкой частицы.

Второе слагаемое $\overline{\sigma_{ih} (\frac{\partial U_i}{\partial x_k})}$ описывает ту часть работы вязких сил, которая превращается в тепло. Эту величину обычно называют скоростью вязкой диссипации и обозначают $\rho\varepsilon$:

$$\rho\varepsilon = \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k}} = \mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_k}. \quad (3.20)$$

Нетрудно показать, что вязкая диссипация $\rho\varepsilon$ всегда положительна. Рассмотрим явно неотрицательную величину

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2 > 0.$$

Произведя несложные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2 &= \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} = \\ &= 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

откуда для вязкой диссипации получаем выражение

$$\rho\varepsilon = \frac{\mu}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (3.21)$$

Воспользовавшись выражениями (3.18) и (3.19), можем записать уравнение баланса энергии (3.16) в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{U_i U_i U_k}}{2} + \overline{P U_k} + \overline{\sigma_{ik} U_i} \right) = -\rho\varepsilon. \quad (3.22)$$

Первое слагаемое этого уравнения определяет скорость изменения суммарной кинетической энергии турбулентного течения в произвольной точке потока. Остальные слагаемые описывают причины, по которым происходит это изменение:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\underbrace{\frac{\overline{U_i U_i}}{2}}_A U_k + \underbrace{\overline{P}}_B U_k + \underbrace{\overline{\sigma_{ik}}}_{C} U_i \right)$$

— слагаемые дивергентного типа. Они характеризуют перераспределение энергии по пространству за счет соответственно

A - конвективного переноса осредненной скоростью, B - работы сил давления и C - молекулярной диффузии благодаря вязкости; $\rho \varepsilon$ — скорость вязкой диссипации, которая, очевидно, всегда дает отрицательный вклад в энергетический баланс.

Проинтегрируем уравнение (3.22) по объему V , ограниченному замкнутой твердой поверхностью S . При этом учтем, что на основании теоремы Остроградского-Гаусса интегрирование слагаемых дивергентного типа по объему сводится к интегрированию по поверхности:

$$\begin{aligned} & \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} U_k + \overline{P} U_k + \overline{\sigma_{ik}} U_i \right) dV = \\ & = \int_S \left(\rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2} U_k + \overline{P} U_k + \overline{\sigma_{ik}} U_i \right) dS_k = 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Равенство нулю здесь следует из граничного условия $U_k = 0$ на твердой поверхности. Уравнение (3.23) показывает, что члены дивергентного типа не могут изменить суммарную энергию в объеме V , а лишь перераспределяют ее по пространству в пределах этого объема. Следовательно:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V E dV = - \int_V \rho \varepsilon dV. \quad (3.24)$$

Суммарная кинетическая энергия в объеме V уменьшается, необратимо преобразуясь в тепло механизмом вязкой диссипации. Этот вывод настолько очевиден, что появляется чувство неудовлетворенности результатами проведенного анализа уравнения (3.22). Действительно, это уравнение не слишком информативно, поскольку является чересчур общим. Описывая баланс суммарной энергии, оно не дает возможности судить о сложных и интересных процессах обмена энергией между осредненным и пульсационным движением, в которых заключена природа турбулентности.

3.2.2. Баланс энергии осредненного движения

Если аналогичные операции проделать с уравнением Рейнольдса, то получим.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\overline{U_i U_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i U_i U_k}) = - \frac{1}{\rho} \left(\overline{U_i} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \overline{U_i} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} \right) + \\ & + \frac{1}{\rho} \left(\overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} + \overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} \right) - \left[\overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) + \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) \right]. \end{aligned} \quad (3.25)$$

При $i=j$, обозначив $E_{\text{оср}} = \rho \frac{\overline{U_i U_i}}{2}$, получим

$$\frac{\partial E_{\text{оср}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_k} E_{\text{оср}}) = - \overline{U_k} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_k} + \overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} - \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}). \quad (3.26)$$

Выражая два последние слагаемые этого уравнения с помощью соотношений, аналогичных (3.19);

$$\begin{aligned} & \overline{U_i} \frac{\partial \overline{\sigma_{ik}}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i} \overline{\sigma_{ik}}) - \overline{\sigma_{ik}} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}, \\ & \overline{U_i} \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u_i u_k}) = \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{U_i} \overline{u_i u_k}) - \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

получаем уравнение баланса энергии осредненного течения:

$$\frac{\partial E_{\text{оср}}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{\overline{U}_k E_{\text{оср}}}_{\text{I}} + \underbrace{\overline{U}_k \overline{P}}_{\text{II}} - \underbrace{\overline{U}_l \overline{\sigma_{lk}}}_{\text{III}} + \frac{\rho}{2} \overline{U_l \overline{u_l u_k}} \right] =$$

$$= - \overline{\sigma_{lk}} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k} + \rho \overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k}. \quad (3.28)$$

Слагаемое I этого уравнения - скорость изменения энергии осредненного движения, слагаемое II - перенос этой энергии по пространству, III-вязкая диссипация энергии осредненного движения. Последнее IV-слагаемое этого уравнения описывает обмен энергией осредненного и пульсационного движений. Наиболее убедительным подтверждением правильности подобной трактовки физического смысла этого слагаемого является то, что в уравнении баланса турбулентной энергии E_T (см. ниже) имеется точно такой же член, но с противоположным знаком. Если это слагаемое отрицательно, то осредненное течение отдает энергию пульсационному движению, если положительно - перенос энергии происходит в обратном направлении.

3.2.3. Баланс энергии пульсационного движения

Получим вначале уравнение, описывающее динамику моментов второго порядка $\overline{u_i u_j}$. Осредним уравнение (3.15) и вычтем из него (3.25). В результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_i}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{U}_l \overline{u_l u_k} + \overline{U}_j \overline{u_l u_k} + \overline{U}_k \overline{u_l u_j} + \overline{u_l u_j u_k}] =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) +$$

$$+ \left(\overline{U}_l \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_j u_k} + \overline{U}_j \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_l u_k} \right). \quad (3.29)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i u_j}) + \frac{\partial}{\partial x_k} [\overline{U}_k \overline{u_l u_j} + \overline{u_l u_j u_k}] =$$

$$= - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} + \overline{u_j} \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} \right) -$$

$$- \left(\overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k} + \overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} \right). \quad (3.30)$$

Уравнение (3.30) описывает динамику компонент тензора турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса) и в принципе, как об этом уже говорилось выше, можно попытаться использовать его для замыкания уравнения Рейнольдса (3.10). Однако не трудно видеть, что уравнение (3.30) содержит новые моменты второго и третьего порядка:

$$\overline{u_i u_j u_k}, \quad \overline{u_l} \frac{\partial p}{\partial x_l}, \quad \overline{u_l} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k}$$

и, следовательно, система уравнений (3.10) и (3.30) вновь оказывается незамкнутой.

И, наконец, полагая в (3.30) $i=j$, выражая первое и второе слагаемые в правой части аналогично (3.27) и домножая на $\rho/2$, получим уравнение баланса энергии пульсационного движения:

$$E_T = \frac{\rho}{2} \overline{u_l u_l} = \frac{\rho}{2} (\overline{u_1^2} + \overline{u_2^2} + \overline{u_3^2}),$$

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\underbrace{\overline{U}_k E_T}_A + \underbrace{\overline{u_k p}}_B - \underbrace{\overline{u_l \sigma_{lk}}}_C + \rho \underbrace{\overline{u_k \frac{u_l u_l}{2}}}_D \right] =$$

$$= - \overline{\sigma_{lk}} \frac{\partial \overline{u_l}}{\partial x_k} - \rho \overline{u_l u_k} \frac{\partial \overline{U}_l}{\partial x_k}. \quad (3.31)$$

Физический смысл слагаемых этого уравнения достаточно очевиден.

$\partial E_T / \partial t$ — скорость изменения турбулентной энергии в рассматриваемой точке пространства.

Остальные слагаемые описывают причины этого изменения. Слагаемое $\frac{\partial}{\partial x_k} (A + B + C + D)$ характеризует подвод (отвод) турбулентной энергии в данную точку пространства благодаря

конвективному переносу пульсационной энергии осредненной скоростью - A , диффузии по пространству за счет пульсаций давления - B , молекулярной диффузии, т. е. переносу турбулентной энергии по пространству механизмом молекулярной вязкости - C , турбулентной диффузии - D , которая представляет собой перенос турбулентной энергии по пространству турбулентными пульсациями и определяется одноточечными тройными моментами пульсаций скорости. Слагаемое $\rho \varepsilon_\tau = \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ характеризует скорость вязкой диссипации турбулентной энергии (сравним с уравнениями (3.20) и (3.28)), Вязкая диссипация всегда дает отрицательный вклад в баланс кинетической энергии.

Второе слагаемое в правой части этого уравнения совпадает с последним слагаемым уравнения (3.28) и имеет противоположный знак. Очевидно, что эти слагаемые описывают обмен энергией между осредненным и пульсационным движениями. Надо сказать, что обычно в пристенной турбулентности это слагаемое в уравнении (3.28) отрицательно, а в уравнении (3.31) положительно. Это означает, что энергия передается от осредненного движения пульсационному. По этой причине обычно говорят, что рассматриваемое слагаемое описывает генерацию (порождение) турбулентной энергии в данной точке потока.

Если при переходе от уравнения (3.30) к уравнению (3.31) не производить суммирования по i , то получим уравнение для энергии одной компоненты пульсационного движения $(E_\tau)_i = \frac{\rho}{2} \overline{u_i u_i}$, где $i = 1, 2$, или 3:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (E_\tau)_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{U_k (E_\tau)_i} + \overline{u_k p} \delta_{ik} - \overline{u_i \sigma_{ik}} + \rho \overline{u_k \frac{u_i u_i}{2}} \right] = \\ = - \overline{\sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}} - \rho \overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Это уравнение отличается от уравнения (3.30) наличием слагаемого $\rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, описывающего обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости за счет пульсаций давления. При суммировании по i вследствие того, что $\partial u_i / \partial x_i = 0$, эти слагаемые в сумме дают нуль, т. е. обмен энергией между тремя компонентами пульсационной скорости не изменяет суммарной энергии пульсационного движения.

Интересный результат дает применение уравнения (3.29) к стабилизированному стационарному течению в плоском канале, в котором отлична от нуля только одна компонента осредненной скорости — $\overline{U_1}$, изменяющаяся по координате x_2 :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \overline{u_2 \frac{u_1 u_1}{2}} - \overline{\sigma_{12} u_1} \right] = - \rho \varepsilon_{1\tau} - \rho \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad (3.33a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \overline{u_2 \frac{u_2 u_2}{2}} + \overline{u_2 p} - \overline{\sigma_{22} u_2} \right] = - \rho \varepsilon_{2\tau} + \rho \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad (3.33б)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left[\rho \overline{u_2 \frac{u_3 u_3}{3}} - \overline{\sigma_{32} u_3} \right] = - \rho \varepsilon_{3\tau} + \rho \frac{\partial u_3}{\partial x_3}. \quad (3.33в)$$

Суммируя уравнения (3.30 а,б,в), получаем уравнение баланса суммарной энергии всех трех пульсационных компонент

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\rho \overline{u_2 \frac{u_1 u_1}{2}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u_2 p}) - \frac{\partial}{\partial x_2} (\overline{u_1 \sigma_{21}}) = - \rho \varepsilon_\tau - \rho \overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}. \quad (3.34)$$

В уравнении (3.34) слагаемое DT — турбулентная диффузия, DP — диффузия за счет пульсаций давления, DM — вязкая диффузия, слагаемое D — вязкая диссипация, слагаемое Γ — генерация энергии турбулентности.

Анализ уравнений (3.33) и (3.34) позволяет сделать следующие выводы:

1. Слагаемое $-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2}$, описывающее генерацию турбулентной энергии, присутствует только в уравнении баланса энергии продольных пульсаций.

Обычно в пристенной турбулентности $-\overline{u_1 u_2} \frac{\partial \overline{U_1}}{\partial x_2} > 0$. Это утверждение можно пояснить следующим образом. Считаем, что осредненная скорость монотонно возрастает в направлении от стенки; $\partial \overline{U_1} / \partial x_2 > 0$ (рис. 3.1).

Следуя рассуждениям Л. Прандтля, полагаем, что пульсации скорости в данной точке вызываются тем, что в эту точку попадают вследствие своего хаотического движения моли жидкости из соседних областей течения, где осредненная скорость \bar{U}_1 имеет другую величину. Логика рассуждений Прандтля читателю хорошо известна из курса механики жидкости. (Следует подчеркнуть, что при всей своей кажущейся простоте эта модель Прандтля является весьма физической и, как доказывают структурные последние измерения пристенной турбулентности, в целом правильно отражает суть явления). Итак, следуя Прандтлю, нетрудно убедиться, что положительным поперечным пульсациям u_2 соответствуют отрицательные продольные пульсации u_1 , и наоборот (рис. 3.1). Поэтому в среднем $\overline{u_1 u_2} < 0$, откуда с учетом $\partial \bar{U}_1 / \partial x_2 > 0$ следует $(-\overline{u_1 u_2} \partial \bar{U}_1 / \partial x_2) > 0$ в уравнении (3.33а),

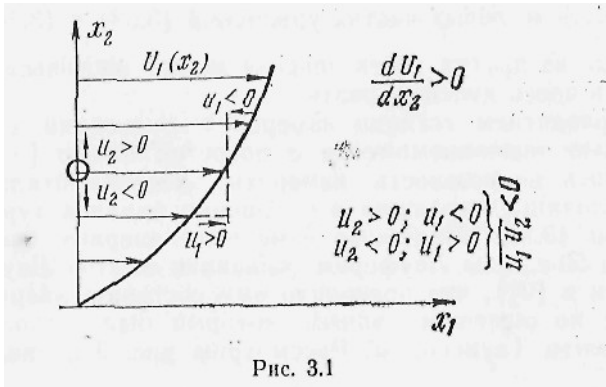


Рис. 3.1

а в уравнении баланса энергии осредненного движения соответствующее слагаемое $(\overline{u_1 u_2} \partial \bar{U}_1 / \partial x_2) < 0$. Это означает, что генерация турбулентности в рассматриваемом течении происходит следующим образом. Энергия отбирается от осредненного движения и передается только продольной компоненте пульсаций. Этим объясняется тот экспериментальный факт (см. рис. 1.15), что интенсивность продольной компоненты пульсаций вблизи стенки существенно выше, чем поперечных.

2. Поперечные пульсации u_2 и u_3 получают энергию не непосредственно от осредненного течения, а опосредованно. Энергия, воспринятая продольной компонентой, перераспределяется между всеми тремя компонентами пульсаций скорости благодаря пульсациям давления. Пульсации давления не могут изменить суммарную турбулентную энергию E_T в данной точке, о чем свидетельствует то, что в уравнении баланса (3.34)

$$\rho \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_1} + \rho \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_2} + \rho \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_3} = 0. \quad (3.35)$$

Роль пульсаций давления заключается в том что они стремятся равномерно перераспределить энергию между тремя компонентами пульсаций, т. е. приблизить турбулентность к изотропии, при которой $E_{T1} = E_{T2} = E_{T3}$.

3. Генерируемая в данной точке потока турбулентная энергия частично диссипирует за счет молекулярной вязкости, а остальная ее часть переносится в другие точки пространства. Этот перенос описывают слагаемые вида

$\frac{\partial}{\partial x_2} (\dots)$ в левых частях уравнений (3.33) и (3.34). В свою очередь из других точек энергия может вноситься в данную точку и здесь диссипировать.

С развитием техники измерения пульсаций скорости с помощью термоанемометра с нагретой нитью [3,4] предоставилась возможность измерить экспериментально почти все величины, входящие в уравнение баланса турбулентной энергии (3.34). Подобные измерения впервые были выполнены в 50-е годы Лауфером (описание опытов Лауфера приводится в [3]), что позволило ему составить энергетический баланс по опытным данным, который был несколько скорректирован Таунсендом. Рассмотрим рис. 3.2, на котором приведена диаграмма баланса турбулентной энергии по Лауферу—Таунсенду для пристенной области течения, где эта диаграмма в равной степени справедлива для круглой трубы и плоского канала.

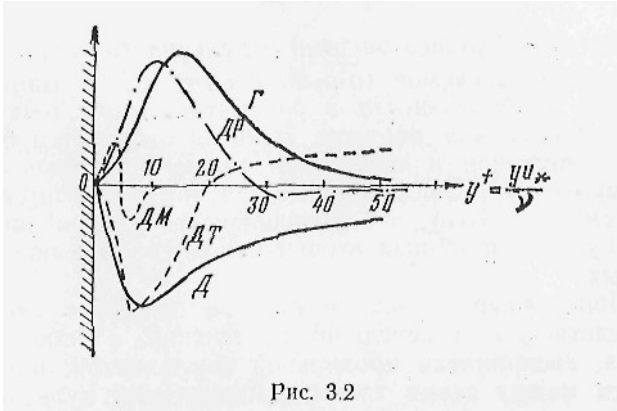


Рис. 3.2

Как видно, максимум генерации турбулентной энергии находится у стенки, но за пределами вязкого подслоя, т. е. в переходной области. Большая часть энергии здесь же и диссипирует, о чем свидетельствует тот факт, что координата максимума диссипации энергии турбулентности приблизительно совпадает с положением максимума генерации. Кроме того, и по величине эти слагаемые в рассматриваемой области течения близки. В то же время часть порожденной энергии выносится из области максимальной генерации. Причем молекулярная диффузия выносит энергию пульсаций преимущественно в направлении стенки, в вязкий подслой, где эта энергия диссипирует, необратимо преобразуясь в тепло. Гораздо большая доля турбулентной энергии выносится из области максимальной генерации турбулентной диффузией, причем этот диффузионный механизм создает перенос энергии в направлении ядра турбулентного потока, где, как показывает анализ, существует динамическое равновесие между притоком энергии благодаря турбулентной диффузии и вязкой диссипацией (на рис. 3.2 область больших значений y^+ не показана). И только одно слагаемое уравнения (3.34), содержащее пульсации давления, Лауферу не удалось определить непосредственными измерениями, поэтому оно было рассчитано как величина, замыкающая баланс. (Справедливости ради отметим, что, насколько нам известно, до сих пор никому не удалось выполнить подобные измерения.)

Пусть точность измерений была не слишком высокой, однако в качественном отношении правильность рассмотренной схемы не вызывает сомнений. Важно отметить, что вблизи стенки генерация приблизительно уравнивается диссипацией, и можно записать приближенное выражение баланса турбулентной энергии в «бездиффузионном приближении»:

$$\overline{u_1 u_2} \frac{d\bar{U}_1}{dx_2} \cong \epsilon_T = \nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \overline{u_k}}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right), \quad (3.36)$$

Таким образом, мы рассмотрели имеющие прозрачный физический смысл уравнения энергетического баланса вида (3.34), содержащие неизвестные корреляции $\overline{u_i u_j}$. Подобные уравнения или их модификации, упрощения, в том числе и (3.36), часто используют как основу при построении модельных уравнений для замыкания системы осредненных уравнений Рейнольдса.

3.3 Уравнение баланса «энергии» температурных пульсаций

, Способ получения этого уравнения аналогичен способу, описанному в предыдущем параграфе, поэтому мы не будем подробно останавливаться на соответствующих выкладках.

Если из уравнения (3.3) вычесть уравнение (3.11), то получим уравнение, описывающее динамику пульсации температуры:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \bar{U}_k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \vartheta}{\partial x_k} - \overline{\frac{\partial \vartheta}{\partial x_k}} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (3.37)$$

Домножим (3.37) на ϑ и произведем осреднение, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{\vartheta^2}}{2} \right) + \bar{U}_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{\vartheta^2}}{2} \right) + \overline{u_k \vartheta} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k \frac{\vartheta^2}{2}} \right) = a \overline{\vartheta} \frac{\partial^2 \overline{\vartheta}}{\partial x_k \partial x_k}. \quad (3.38)$$

Преобразуя правую часть этого уравнения с помощью следующего очевидного соотношения

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\overline{\theta^2}}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_k}} \right) = \overline{\theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial x_k \partial x_k}} + \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k},$$

подучим

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\theta^2}}{2} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{U_k \frac{\theta^2}{2}} + \overline{u_k \frac{\theta^2}{2}} - a \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{\theta^2}}{2} \right) = - \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - a \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k}. \quad (3.39)$$

Величину $\sigma_0^2 = \overline{\theta^2}$ будем называть «энергией» температурных пульсаций (в кавычках), имел в виду полезную аналогию полученного балансного соотношения (3.39) с рассмотренным выше уравнением баланса турбулентной энергии (3.34). Величина $\overline{\theta^2}$, являясь дисперсией пульсаций температуры, характеризует размах пульсаций, но, конечно, не является энергетической характеристикой в общепринятом понимании, что видно хотя бы из ее размерности. Как было показано А. М. Обуховым [15], эта величина характеризует изменение энтропии единицы массы жидкости при переходе ее от некоторого первоначального состояния, в котором имели место температурные неоднородности с дисперсией $\overline{\theta^2}$, к состоянию термодинамического равновесия под действием внутренних необратимых процессов.

$$\frac{d}{dt} \frac{\overline{\theta^2}}{2}$$

Итак скорость изменения плотности «энергии» температурных пульсаций в точке. Остальные слагаемые уравнения описывают причины этого изменения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}$$

($DK+DT+DM$) перенос «энергии» по пространству за счет конвекции осредненной скоростью - DK , турбулентной диффузии $-DT$, диффузии молекулярной теплопроводностью DM ;

$$-\overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} - \text{генерация температурных пульсаций};$$

$$\epsilon_\theta = a \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} \text{ — температурная диссипация, т. е. рассеивание, рассасывание}$$

температурных неоднородностей под действием молекулярной теплопроводности.

Интегрируя (3.39) по замкнутому объему, ограниченному твердыми теплопроводными стенками и применяя к слагаемым дивергентного типа формулу Остроградского—Гаусса, с учетом граничных условий имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\overline{\theta^2}}{2} dV + \int_V \overline{u_k \theta} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_k} dV + \int_V \epsilon_\theta dV = a \int_S \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\overline{\theta^2}}{2} dS_k. \quad (3.40)$$

Выражение в правой части' (3.40)., вообще говоря, не равно нулю. Оно описывает перенос «энергии» пульсаций температуры молекулярной теплопроводностью через границу жидкости и стенки. Этот процесс переноса является, единственным механизмом переноса турбулентных температурных пульсаций в стенку. Можно показать, что уровень температурных пульсаций в стенке и в жидкости зависит от соотношения свойств (коэффициента теплопроводности; теплоемкости и плотности) жидкости и твердой стенки.

Вернемся к (уравнению (3.39). На кафедре Инженерной теплофизики МЭИ оно было подробно исследовано применительно к области гидродинамической и тепловой стабилизации при стационарном турбулентном течении жидкого металла (ртути) в круглой трубе. В этом случае $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ и конвекция осредненной скоростью (слагаемое DK) равна нулю, Остальные слагаемые были рассчитаны по опытным данным. Результаты этого анализа показаны на рис.3.3.

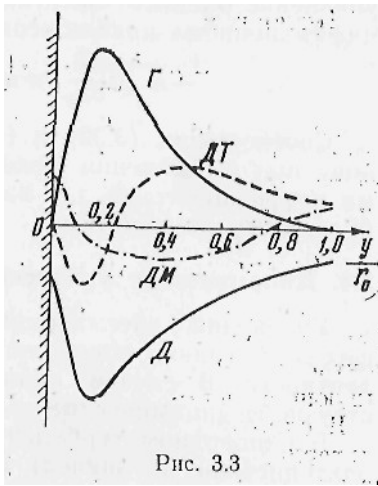


Рис. 3.3

Не трудно видеть, что, генерация температурных пульсаций наиболее интенсивна в области течения $0,7 < r/r_0 < 0,9$, т. е. в области, где пульсации скорости и градиент осредненной температуры достаточно велики. Генерация снижается в направлении как к центру, так и к стенке трубы. В центре трубы генерация равна нулю, поскольку равен нулю градиент осредненной температуры. Большая часть «энергии» пульсаций температуры, возникших в области наибольшей генерации, здесь же и диссипирует, так как максимумы генерации и диссипации примерно совпадают. В то же время часть «энергии» выносится из области максимальной генерации турбулентной и молекулярной диффузией преимущественно в направлении к центру потока, где она диссипирует. Молекулярная диффузия преобладает в области вязкого подслоя и, как уже отмечалось, является единственным источником; пульсаций температуры в стенке трубы. Более подробно—см. [6].

Заметим, что в той области течения, где и генерация, и диссипация велики, между ними существует примерное динамическое равновесие. Для этой области можно записать уравнение баланса «энергии» пульсаций температуры в «бездиффузионном» приближении

$$-u_k \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \cong a \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_k} \right). \quad (3.41)$$

Соотношения (3.39) и (3.41) могут быть приняты за основу при составлении модельных уравнений с эмпирическими коэффициентами для замыкания системы уравнений турбулентного теплообмена.

3.4. Более развитая модель структуры пристенной турбулентности. Понятие о когерентных структурах.

Традиционное представление о структуре пограничного слоя на обтекаемой твердой поверхности показано на рис 3.4.

Рис.3.4.

Область 1 – область внешнего потока;

Область 2 – перемежающаяся область, в которую время от времени проникают вихри из пристенной области;

Область 3 – турбулентного течения, распределение скорости в которой описывается логарифмической зависимостью;

Область 4 – переходная область, область, в которой имеет место максимальная генерация турбулентности;

Область 5 – вязкий подслой, в котором скорость изменяется по линейному закону.

Такая схема имеет ряд недостатков, особенно много вопросов и возражений вызывает представление о вязком подслое, имеющем постоянную толщину δ . Хорошо известно, что